ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2000

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Définitions et notations

Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}.$$

Pour $(x,t) \in [0,1]^2$, on pose

$$K(x,t) = \frac{t^2}{x} \text{ si } x > t,\ K(x,t) = K(t,x) \text{ si } t > x \text{ et } K(x,x) = x.$$

On désigne par $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose

$$Tf\ :\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt.$$

On notera en général de la même façon une fonction et une de ses restrictions à un sous intervalles de son intervalle de définition maximum.

Partie I

1. Vérifier que $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$ définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$, de classe C^1.

2. Exprimer pour $x \in \mathbb{R}$, $xG'(x) + \frac{3}{2}G(x)$ à l'aide de fonctions usuelles simples.

Partie II

1. (a) Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ en préciser $Tf(0)$ et montrer la continuité de Tf en 0.
   (b) Montrer que $f \mapsto Tf$ définit un endomorphisme T de $\mathcal{C}([0,1])$.

2. T est-il surjectif ?

3. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On pose $F = Tf$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a :

   $$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\, dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

   (b) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$. Établir une relation entre $F(1)$ et $F'(1)$.

(c) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,1]$ et vérifie sur $]0,1]$ l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f.$$

4. On considère l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0.$$

(a) Trouver les solutions de (E_0) sur $]0,1]$ de la forme $x \longrightarrow x^\lambda,\ \lambda \in \mathbb{Z}$.

(b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) sur l'intervalle $]0,1]$.

(c) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, Tf est la seule solution sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

5. On dira qu'un réel λ est valeur propre de T s'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tel que $Tf = \lambda f$ et $f \neq 0$. Dans ce cas, on dira que f est un vecteur propre de T associé à λ.

Montrer que λ est une valeur propre non nulle de T si et seulement s'il existe une solution non nulle sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$\lambda x^2y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0$$

vérifiant $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

Partie III

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda)\ :\ \lambda x^2y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution f_λ de (E_λ) sur $\mathbb{R}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que

$$f_\lambda(x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

2. Donner $K_\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ f_\lambda(x) = K_\lambda \sqrt{x}\, G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\, x\right).$$

3. (a) Justifier l'existence de $a > 0$ tel que f_λ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0,a]$.

(b) Soit y une solution de (E_λ) sur $]0,1]$. On pose $z = \frac{y}{f_\lambda}$. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par z'.

(c) En déduire qu'il existe une solution g_λ de (E_λ) sur $]0,1]$ telle $g_\lambda(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. Une telle solution g_λ étant choisie.

(a) Montrer que la famille (f_λ, g_λ) d'éléments de $\mathcal{C}(]0,1])$ est libre.

(b) Décrire alors l'ensemble $\sum_0$ des solutions sur $]0,1]$ de l'équation différentielle (E_λ).

(c) Montrer que les solutions de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 sont exactement les éléments de $Vect(f_\lambda)$.

5. (a) Montrer que toute valeur propre non nulle de T est de la forme $\lambda_k = \dfrac{3}{k^2\pi^2}$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, λ_k est effectivement valeur propre de T.

   (c) Donner les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_k, $k \in \mathbb{N}^*$.

Partie IV

On considère l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $(f,g) = \displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ pour f et g dans E. On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. (On ne demande pas de redémontrer que l'on a bien défini un produit scalaire).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k \;:\; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\; x \mapsto \sqrt{x}\,G(k\pi x)$ et $\phi_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}$.

1. Montrer que $\forall\,(f,g) \in E^2,\;\; (Tf,g) = (f,Tg)$.

2. (a) Calculer Th_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que la famille $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de E.

3. (a) Développer en série de Fourier la fonction $f \;:\; \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.

   (b) En déduire
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)\,dxdt$ et comparer le résultat avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2$.

4. Pour tout $x \in [0,1]$, on note $K_x \;:\; [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\; t \mapsto K(x,t)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $K_{N,x}$ la projection orthogonale de K_x sur $Vect(\phi_1,\ldots,\phi_N)$.

   (a) Donner l'expression de $K_{N,x}$.

   (b) Établir $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2\,dx = 0$.

   (c) Soit $f \in E$ et $F = Tf$. Montrer que
   $$\lim_{N\to+\infty} \|F - \sum_{k=1}^{N}(F,\phi_k)\phi_k\|^2 = 0.$$
   (On remarquera que $\forall\,x \in [0,1],\;\; F(x) = (K_x,f)$.)

FIN DE L'ÉPREUVE